学校编码：10384　　　　分类号______ 密级______

学号：19020100153953　　　　UDC______

厦门大学

博 士 学 位 论 文

加权射影线的凝聚层范畴与向量丛稳定范畴中的倾斜对象

Tilting objects in the category of coherent sheaves and in the stable category of vector bundles on weighted projective lines

阮 诗 佺

指导教师姓名：林 亚 南 教授

专 业 名 称：基 础 数 学

论文提交日期：2014 年 4 月

论文答辩日期：2014 年 5 月

学位授予日期：2014 年 　 月

答辩委员会主席：__________

评 阅 人：__________

2014 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下, 独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）:

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　月　日解密，解密后适用上述授权。

（　　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

中文摘要

1987年, 为了从几何的角度来理解 Ringel 介绍的 canonical 代数, Geigle-Lenzing 引入了加权射影线的概念. 他们证明了加权射影线的凝聚层范畴中存在 canonical 倾斜层, 其自同态代数是一个 canonical 代数, 因此凝聚层范畴与该 canonical 代数的有限维模范畴的导出范畴之间是三角等价的, 从而建立了代数与几何的一个联系. 此外, 凝聚层范畴的向量丛子范畴具有多种不同的 Frobenius 正合结构, 相应的稳定三角范畴分别对应三角奇异, Kleinian 奇异以及 Fuchsian 奇异等不同的奇异理论. 本学位论文主要研究加权射影线的凝聚层范畴以及向量丛范畴的两种不同的稳定范畴中的倾斜对象. 全文共分为五章.

第一章介绍本文的一些研究背景及有关方向的发展动态, 并阐述本文的主要结果.

第二章回顾与本文密切相关的一些概念与一些重要的基本性质和已知结论.

第三章主要研究权型为 $(2,2,n)$ 的加权射影线的凝聚层范畴中的倾斜丛. 我们首先给出了倾斜丛的分类, 然后在传统的 Brenner-Butler 定理的基础上, 引入“丢失的部分”的概念来衡量凝聚层范畴与倾斜丛的自同态代数的模范畴之间的差别, 并证明了任意一个倾斜丛诱导的“丢失的部分”都可以分解成两个 A 型路代数的模范畴的直积.

第四章主要研究向量丛范畴 $\mathrm{vect}\,\mathbb{X}$ 模去所有的线丛 $\mathscr{L}$ 得到的稳定三角范畴 $\underline{\mathrm{vect}}\mathbb{X}$ 中的倾斜对象. 对于权型为 (p_1,p_2,p_3) 的情形, 我们给出文献 [58] 的一个主定理的新证明; 特别地, 对于权型为 $(2,p,q)$ 的情形, 我们构造了两类由 Auslander 丛构成的倾斜对象, 不仅推广了 Lenzing 的结果, 还否定了 Kussin-Lenzing-Meltzer 提出的一个猜想. 对于亏格为 1 的情形, 我们引入了与向量丛稳定范畴相应的 cluster 范畴的概念, 并研究了向量丛稳定范畴中的倾斜对象与相应的 cluster 范畴中 cluster 倾斜对象之间的关系; 特别地, 对于权型为 $(2,2,2,2;\lambda)$ 的情形, 我们构造了 $\underline{\mathrm{vect}}\mathbb{X}$ 中两类特殊的倾斜对象, 然后运用 cluster 倾斜理论的工具, 给出了凝聚层范畴及其导出范畴中倾斜对象的自同态代数的完全分类.

第五章主要研究向量丛范畴 $\mathrm{vect}\,\mathbb{X}$ 模去结构层的 τ-轨道 $\tau^{\mathbb{Z}}\mathcal{O}$ 得到的稳定三角范畴 $\underline{\mathrm{vect}}^{\mathbb{Z}}\mathbb{X}$ 中的倾斜对象. 对于 Arnold 的奇怪对偶列表中的 14 类权型, 我们以 $(2,3,8)$ 型为例, 详细阐述在 $\underline{\mathrm{vect}}^{\mathbb{Z}}\mathbb{X}$ 中构造出由线丛构成的倾斜对象的方法, 并得到自同态代数为 Nakayama 代数的一类重要的倾斜对象.

关键词: 加权射影线; 凝聚层; 向量丛; 稳定范畴; 倾斜对象

Abstract

The notion of weighted projective lines were introduced by Geigle-Lenzing in 1987, in an attempt to give a geometric treatment for the so-called canonical algebras, introduced and studied by Ringel. They showed that the category of coherent sheaves on a weighted projective line admits a tilting sheaf whose endomorphism algebra is a canonical algebra. Hence there is an equivalence between the bounded derived categories of the category of coherent sheaves on a weighted projective line and the category of finite dimensional modules on a canonical algebra, which then links the representation theory of algebras and the geometry theory. Meanwhile, the subcategory of vector bundles carries a various of Frobenius exact structures, and the certain stable categories in Happel's sense are triangulated which corresponding to a various of singularities, for instance, triangulated singularity, Kleinian singularity, Fuchsian singularity and so on. This dissertation concentrates on tilting objects over the category of coherent sheaves and over the certain stable categories of vector bundles, which includes five chapters.

In the first chapter, we give a brief introduction of the background and recent developments related to this dissertation, and make a systemic exposition of our main results.

In the second chapter, we recall some concepts and properties which are closely related to this dissertation, which give a necessary preparation for the following chapters.

In the third chapter, we study the tilting bundles on the category of coherent sheaves of weight type $(2, 2, n)$. We introduce a new conception of "missing part" to compare the category of coherent sheaves and the category of finite dimensional modules over the quasi-tilted algebras. We firstly give a classification of tilting bundles and then prove that the "missing part" induced by any tilting bundle can be decomposed as a product of two module categories of type A.

In the fourth chapter, we investigate the tilting objects in the stable category of vector bundles under distinguished exact structure. Firstly, we give a direct method by constructing triangles to provide a new proof for a main theorem in [58], meanwhile by constructing two tilting objects consisting of Auslander bundles we solve a conjecture of Kussin-Lenzing-Meltzer and generalize a result of Lenzing. Secondly, we introduce the cluster category for the stable category of vector bundles of genus one, and investigate the relationships between the tilting objects in the stable category and the cluster tilting objects in the related cluster category; particularly, for the case of weight type $(2,2,2,2;\lambda)$, we construct two special tilting objects first, and then give classifications of the endomorphism algebras of tilting objects via cluster mutation in the category of coherent sheaves and also in its derived category.

In the fifth chapter, we investigate the tilting objects in the stable category of vector bundles under $\tau^{\mathbb{Z}}\mathcal{O}$-exact structure. We introduce a method to construct tilting objects consisting of line bundles in this stable category, with the type (2, 3, 8) as an example, for the 14 kinds of weight types in the Arnold's strange duality list.

Key words: weighted projective line; coherent sheaf; vector bundle; stable category; tilting object

目 录

Contents

第 一 章　前言

1.1　背景介绍

本节简单回顾一些关于倾斜理论和加权射影线的凝聚层范畴与向量丛范畴的研究背景.

1.1.1　倾斜理论

倾斜理论是构造范畴之间等价的有效方法, 已经成为有限维代数表示理论中一个最基本和最重要的研究对象和研究工具. 而且, 在数学研究的其他分支, 包括代数群表示理论, 交换与非交换代数几何, 代数拓扑等, 都能看到倾斜理论的应用.

倾斜理论的发展大体上分为以下几个阶段. 1973 年, Bernstein-Gelfand-Ponomarev [8] 在证明 Gabriel 定理的过程中, 引入了 Coxeter 函子的概念, 这被大家公认为是倾斜函子最初的模型. 1979 年, Auslander-Platzeck-Reiten [3] 将 Coxeter 函子的概念推广到具有投射-非入射单模的 artinian 环上, 并构造出最早的一类"倾斜模" — 称之为 APR 倾斜模. 在此基础上, 1980 年, Brenner-Butler [11] 引入了倾斜函子的概念, 并且给出倾斜模的公理化的定义. 他们将 artinian 代数 Λ 与倾斜 Λ-模 T 的自同态代数 Γ 的有限维模范畴进行了比较, 证明了倾斜函子 $\mathrm{Hom}(T,-)$ 诱导了 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 与 $\mathrm{mod}\,\Gamma$ 的相应子范畴之间的等价. 1982 年, Happel-Ringel [44] 简化了倾斜模的公理化定义并引入倾斜函子 $\mathrm{Ext}^1(T,-)$, 更加完整地给出了 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 与 $\mathrm{mod}\,\Gamma$ 的相应子范畴之间的对应关系. 1987 年, Happel [40] 证明了 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 与 $\mathrm{mod}\,\Gamma$ 的导出范畴之间总是三角等价的, 因此在倾斜过程中代数的许多同调性质是保持的. 随后, Rickard [86] 于 1989 年提出了倾斜复形的概念, 得到了 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 与 $\mathrm{mod}\,\Gamma$ 的导出范畴之间的 Morita 理论, 这不仅对两个代数何时导出等价给出了一个漂亮的回答, 还对自入射代数的倾斜理论 [85,87] 以及有限群的表示理论 [30,88] 都有重要的应用. 到了 2006 年, 为了用箭图的表示理论来对 Fomin-Zelevinsky

[36] 介绍的 cluster 代数进行范畴化, Buan-Marsh-Reineke-Reiten-Todorov [14] 引入了遗传代数的 cluster 范畴的概念并研究了 cluster 倾斜理论, 从此倾斜理论进入了一个全新的发展阶段. 在不到十年的时间里, cluster 倾斜理论吸引了一大批数学工作者的兴趣, 取得了重大的进展, 参见 [1,4,12,13,15–17,20,97] 等.

1.1.2 凝聚层范畴 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$

为了从几何的观点来理解 Ringel 介绍的 canonical 代数, Geigle-Lenzing [38] 于 1987 年引入了加权射影线的概念, 并研究了加权射影线 $\mathbb{X}$ 的凝聚层范畴 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 的结构和性质. 他们证明了 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 中存在 canonical 倾斜层, 其自同态代数是与 $\mathbb{X}$ 具有相同权型的 canonical 代数, 因此 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 与该 canonical 代数的有限维模范畴的有界导出范畴之间是三角等价的, 从而建立了代数与几何的一个联系. 到了 1996 年, Happel [43] 证明了代数闭域上具有倾斜对象的遗传范畴在导出等价意义的下只有两类, 一类是有限维遗传代数的有限维模范畴, 另一类是加权射影线的凝聚层范畴. 这表明 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 是一类非常重要的遗传 abelian 范畴, 此后 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 受到大家广泛的关注.

关于 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 的研究有许多重要的进展, 首先是 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 的分类结果. 凝聚层范畴 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 的分类问题由加权射影线的同调不变量—拟亏格 $g_\nu(\mathbb{X})$ 或者 Euler 特征所决定, 两者定义略有不同. 本论文采用拟亏格进行分类. 根据拟亏格不同, 加权射影线分为三大类, 分别称为 domestic 型 ($g_\nu(\mathbb{X}) < 1$), tubular 型 ($g_\nu(\mathbb{X}) = 1$) 和 wild 型 ($g_\nu(\mathbb{X}) > 1$). 对于 domestic 型的情形, $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 的分类问题由 Huebner [47] 解决, 此时 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 与 tame 型的遗传代数的模范畴导出等价; 对于 tubular 型的情形, $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 的分类结果由 Lenzing-Meltzer [69] 给出, 他们的结果将 Ringel [89] 关于 tubular 代数的不可分解模的分类结果, 与 Atiyah [2] 关于椭圆曲线的凝聚层的分类结果联系在一起; 关于 wild 型的情形, $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 的分类问题与 wild 型遗传星型图的路代数的表示理论相关, 参见 [60,65].

关于 $\mathrm{coh}\,\mathbb{X}$ 的研究还有如下的一些重要的结果. 1991 年, Geigle-Lenzing [39] 研究了不同权型的加权射影线的凝聚层范畴之间的关系, 此后, 陈小伍-Krause [29] 用不同的方法也给出相应的结果. 1996 年前后, Lenzing, de la Peña, Meltzer 与 Skowronski